

М.Ю. Андреев

ВЦ РАН, Москва,

Н.П. Пильник

ГУ ВШЭ, Москва,

И.Г. Поспелов

ВЦ РАН, Москва

## **Сильный магистральный эффект в модели рациональных ожиданий современной банковской системы России\***

Строится модель рациональных ожиданий банковской системы на основе проведенного эконометрического анализа движения основных видов финансовых инструментов в банковской системе: часть найденных эконометрических соотношений используется как ограничения, а остальные соотношения объясняются моделью. Обнаружен сильный магистральный эффект: равновесные планы агентов при идентифицированных параметрах модели не зависят от представлений агентов о далеком будущем. Магистральный эффект позволяет свести краевую задачу к динамической.

Ключевые слова: *банковская система России, модель общего равновесия, рациональные ожидания.*

JEL classification: C68, D58, G21.

### **1. Введение**

На наш взгляд, в арсенале средств математической экономики для описания банков нет стандартных «заготовок», подобных тем, которые имеются для описания потребителей, производителей, а также товарных и финансовых рынков. В большинстве своем теоретические модели банковской деятельности посвящены исследованию следующих проблем.

1. Способы взаимодействия банка с клиентами при выдаче кредитов или привлечении депозитов, которые моделируются некоторой теоретико-игровой схемой (например (Thadden, 2002)).

2. Исследование отдельных процессов, происходящих в банковском секторе, с помощью задач оптимизации отдельных видов операций для репрезентативного банка. В этом случае описание банковской системы ограничивается только механизмами, анализ которых проводится в модели. Примером может служить процесс долларизации банковского сектора, описанный в (Machicado, 2006), или процесс управления ликвидностью в специфических условиях российской «финансовой стабилизации» 1995–1998 гг. (Гуриев, Поспелов, 1997; Андреев, Поспелов, 2004).

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00563), Российского фонда фундаментальных исследований (проект ориентированных фундаментальных исследований 07-01-12032), Российского гуманитарного научного фонда (проект 07-02-00362), гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-2982.2008.1), Программы фундаментальных исследований Президиума РАН П-2 и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН № 2.

3. Моделирование кризисных явлений в банковской системе. Как и в предыдущем случае, оптимизационная задача пишется для отдельного банка, но далее этот банк отождествляется со всей банковской системой. Основной упор делается на анализ переключения режимов функционирования (например (Florenzano, Kanellopoulou, Vailakis, 2006)).

В прикладных моделях целостной экономики банковский сектор чаще всего особо не выделяется, а его функции распределяются между другими агентами. Примером может служить квартальная модель банка Англии<sup>1</sup>, в которой представлены пять типов агентов: потребитель, фирма, государство, центральный банк и внешний сектор. Поведение потребителей и фирм описывается с помощью оптимизационных задач, для остальных используются некоторые сценарии. Спрос на деньги предъявляют потребители, в функцию полезности которых непосредственно входят реальные денежные остатки. Фирмы, государство и внешний сектор могут выпускать однопериодные доходные облигации, которые у них покупают потребители. То есть фактически в модели выдачей кредитов вместо банков занимаются потребители.

Специфика роли банков в макромоделях чаще всего учитывается посредством мультипликаторов, описывающих воздействие проводимой монетарной политики на кредитно-денежную систему (Дмитриев, Шугаль, 2006). Если предположить, что определенную часть  $\zeta$  привлеченных средств банки оставляют в виде ликвидных средств и обязательных резервов (денежной базы  $H$ ), а остальную выдают в кредит, и эта сумма попадает обратно в банковскую систему в виде средств на расчетных счетах (подробнее в разд. 3), то сумма выданных кредитов составит  $(\zeta^{-1} - 1)H$ , а сумма привлеченных средств —  $\zeta^{-1} H$ . Величина  $\zeta^{-1}$  и называется банковским мультипликатором. Кроме того, в модели могут присутствовать и другие мультипликаторы, характеризующие влияние избыточного резервирования или резервирования части расчетных счетов.

Реже финансовый сектор выделяется как отдельный агент, чье поведение описывается в рамках, например, макроэкономической модели IS-LM феноменологическими функциями спроса и предложения. Например, в (Fair, 2004) финансовый сектор, во-первых, держит денежные остатки и поэтому к нему предъявляет спрос на ликвидность, а во-вторых, кредитует фирмы, позволяя им привлекать дополнительный капитал по процентной ставке  $r_p$ , при этом объемы таких операций целиком определяет фирма. И в-третьих, финансовый сектор берет кредиты у центрального банка, исходя из уровня процентной ставки по государственным облигациям и ставки рефинансирования с учетом необходимости выполнять резервные требования.

<sup>1</sup> [Http://www.bankofengland.co.uk/publications/other/beqm/index.htm](http://www.bankofengland.co.uk/publications/other/beqm/index.htm).

Более последовательным, с нашей точки зрения, является добавление агентов типа «банк» в модель общего экономического равновесия (Florenzano, Kanelloroulou, Vailakis, 2006). В этом случае формулируется задача банка (обычно это максимизация прибыли или полезности от прибыли), и в описание остальных присутствующих в модели агентов вводятся дополнительные инструменты типа кредитов и депозитов. Кроме того, в модели может описываться и деятельность центрального банка. Более детализированное описание такого рода дается в вычислимых моделях общего равновесия (CGE). Примерами могут служить модели, предложенные в (Diaz-Gimenez, Prescott et al., 1992; Goodhart, Sunirand, Tsomocos, 2004). Однако во всех этих работах авторы ограничиваются доказательством существования равновесия или численным исследованием его общих свойств.

Модель межвременного равновесия, хорошо описывающая динамику основных макроэкономических показателей развития экономики России за 2002–2006 гг., была предложена в (Андреев и др., 2007). В этой модели банк выделен как самостоятельный агент в отдельный блок. Модель банковской системы России, о которой пойдет речь далее, задумана как **модернизация блока большой модели экономики России**, отвечающего за описание банковской системы. Это объясняет большое число использованных экзогенных переменных. После включения в общую модель эти экзогенные переменные определяются из условий межвременного равновесия.

Хотя предлагаемая модель разрабатывалась как прикладная, но в ней был получен важный теоретический результат: несмотря на то, что модель строится на принципе рациональных ожиданий, благодаря сильному магистральному эффекту она сводится к динамической системе (разд. 6).

## 2. Источник данных и особенности функционирования банковской системы

Формально, согласно ФЗ «О банках и банковской деятельности», банковская система России «включает в себя Банк России, кредитные организации, а также филиалы и представительства иностранных банков». В данной работе под *банковской системой* будем понимать Центральный банк (ЦБ) и совокупность коммерческих банков<sup>2</sup>. Коммерческих банков около 1 200, и их число постоянно меняется. ЦБ оперативно собирает информацию о деятельности коммерческих банков и ежемесячно публикует балансы второго порядка практически всех банков<sup>3</sup>. Баланс второго порядка представляет собой список из около 1 180 величин запасов (остатков) различных видов финансовых инструментов (балансовых счетов) на конец месяца. В качестве источника данных в модели использованы балансы второго порядка за 45 месяцев с января 2005 г. по сентябрь 2008 г.

<sup>2</sup> Остальные кредитные организации не рассматриваются в данной работе, в большой модели экономики России мы их относим к «фирмам».

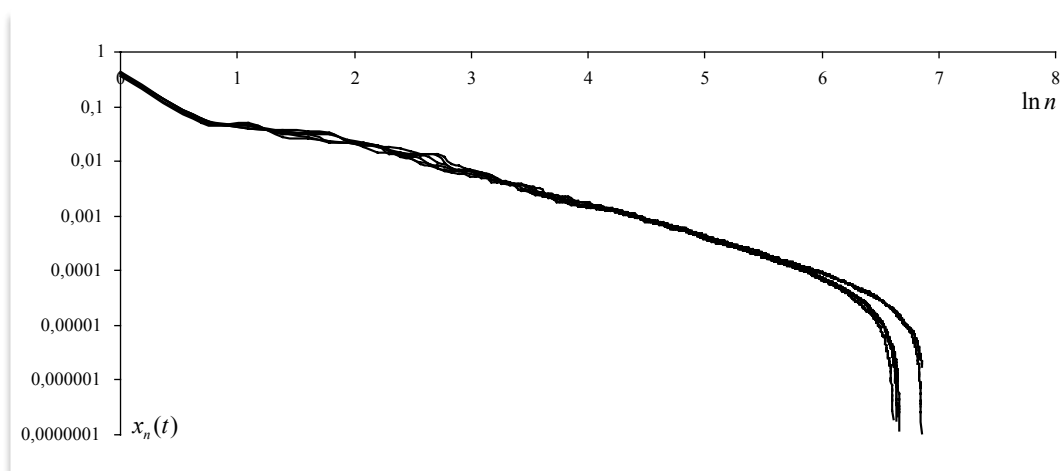
<sup>3</sup> [Http://www.cbr.ru/credit/transparent.asp](http://www.cbr.ru/credit/transparent.asp).

Будем рассматривать совокупность коммерческих банков как единого модельного агента, а вместо множества балансов – один баланс, который представляет собой суммарный баланс всех коммерческих банков. Прежде чем это сделать, надо убедиться, что коммерческие банки функционируют как единый агент. Существуют причины предполагать обратное: хотя формально коммерческие банки равноправны и независимы, но среди них явно выделяются принадлежащие государству гиганты (Сбербанк, Внешторгбанк), а некоторые крупные банки (Газпромбанк) являются дочерними предприятиями государственных корпораций.

Чтобы прояснить этот вопрос, мы сравнили изменение рангового распределения банков за 2005–2007 гг. (рис. 1). Для построения этой диаграммы банки были пронумерованы в порядке убывания валюты баланса. На рисунке в логарифмическом масштабе изображена доля общих активов банковской системы  $x_n(t)$ , приходящаяся на  $n$ -й по размерам активов банк, в зависимости от величины  $\ln n$ . Шесть практически неразличимых кривых отвечают разным периодам времени: месяцы январь и июль 2005–2007 гг.

Видно, что, несмотря на изменения числа банков, состава банковской системы и относительных позиций отдельных банков, ранговое распределение сохраняется удивительно стабильным. Сдвиг «хвоста», приходящийся на 2007 г., связан с резким ростом числа малых банков, публикующих балансы.

Поскольку диаграмма показывает зависимость логарифма от логарифма, линейный участок отвечает знаменитому степенному закону Ципфа–Парето<sup>4</sup>.



**Рис. 1.**

Ранговое распределение банков по активам, 2005–2007 гг.

<sup>4</sup> Этому закону, как известно (Гусейн-Заде, 1987), удовлетворяют самые разнообразные ранговые распределения: городов и лунных кратеров по размеру, слов языка по частоте, физических лиц по доходам, продаж автомобилей по цене и т.д. Имеется огромное количество работ очень разного качества, пытающихся объяснить происхождение этого распределения, однако, по нашему мнению, ясности еще не достигнуто. Тем не менее принято считать, что наличие степенного рангового распределения свидетельствует о некоем системном единстве рассматриваемых объектов (Zipf, 1949).

Как нам кажется, стабильность рангового распределения ясно свидетельствует о том, что *банковская система России действует как единое целое* независимо от «персонального» состава. Следовательно, мы можем рассматривать совокупность коммерческих банков как единого модельного агента. Все 1 180 счетов банков делятся на активы (вложения, требования) и пассивы (обязательства и капитал). Сумма активов тождественно равна сумме пассивов, поскольку баланс формируется исключительно как итог последовательных операций двойной проводки – одновременного изменения на одну и ту же величину одного из активов и одного из пассивов.

Множество счетов второго порядка были агрегированы в группы счетов, сходных по функциям и клиентам. Анализ динамики и структуры этих групп, который подробно изложен в (Андреев, Пильник, Поспелов, 2009), выявил следующие факты.

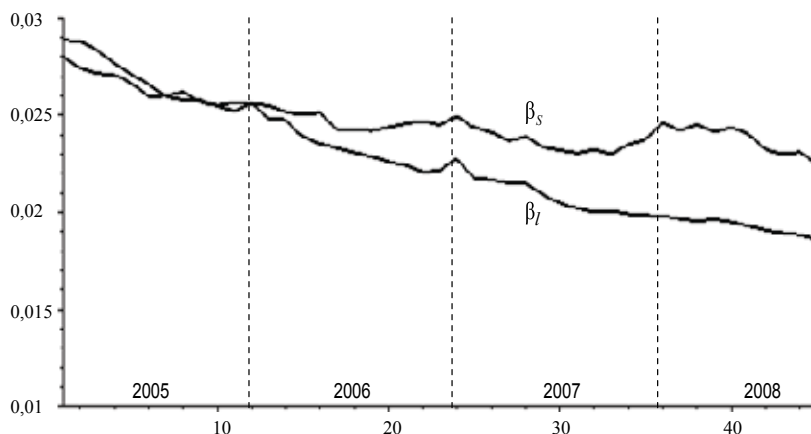
Российская банковская система занимается тем, чем положено: превращает сбережения в кредиты (в 1995–1998 гг. сбережения превращались в ГКО (Автухович и др., 1999)).

Номинальный размер почти всех групп в среднем растет быстро (~3% в месяц), причем интенсивные колебания темпов роста этих групп не имеют простой корреляции с темпами роста макроэкономических показателей.

Структура активов и пассивов меняется заметно, но достаточно плавно. Основной тенденцией в формировании источников средств (пассивов) в 2005–2007 гг. явилось замещение депозитов домохозяйств заимствованиями за границей. Это объясняется тем, что ставка по иностранным кредитам для российских банков в указанный период составляла 6–9%, а укрепление рубля делало эти займы практически бесплатными. Основной тенденцией в размещении средств в 2005–2007 гг. стал значительный рост выданных домохозяйствам кредитов (потребительское кредитование).

Нестабильным оказывается только остаток активного счета депозитов банков в Центральном банке за период март–сентябрь 2007 г. Это связано с двумя событиями. Первое – первичное размещение акций Сбербанком и поступление средств к марту 2007 г. на его расчетные счета. Второе – временный перевод вырученных от распродажи «Юкоса» средств весной–летом 2007 г. на счета Газпромбанка. Эти деньги банки вложили в ЦБ на короткий срок под процент. Описание использования внезапно полученных на расчетные счета денег – одна из задач, которая будет поставлена ниже перед моделью банковской системы.

Начало мирового финансового кризиса проявилось, во-первых, в уменьшении ликвидных активов по сравнению с выявленной эконометрической зависимостью и с последующим восстановлением до этого уровня в связи с пе-

**Рис. 2.**

Изменение обратной дюрации по кредитам  $\beta_I$  и депозитам  $\beta_S$ , день<sup>-1</sup>

реводом остатков средств казначейства в коммерческие банки и, во-вторых, в замещении иностранных заимствований кредитной эмиссией.

Существенным для количественного описания функционирования банковской системы в 2005–2008 гг. стало увеличение средних сроков выплаты кредитов и привлечения средств.

Пусть  $X$  – агрегированный пассив или актив, составленный сложением счетов  $X_\tau$ , различающихся сроками  $\tau$ , на который привлечен депозит или выдан кредит типа  $X$ :  $X(t) = \sum_{\tau} X_{\tau}(t)$ . Обратную дюрацию в период  $t$  определим как

$$\beta_X(t) = [\sum_{\tau} X_{\tau}(t) / \tau] / \sum_{\tau} X_{\tau}(t).$$

Динамика обратных дюраций по всем кредитам юридическим и физическим лицам  $\beta_I$  и всем депозитам физических, юридических лиц и нерезидентов  $\beta_S$  показана на рис. 2. На рисунке видно, что обратные дюрации активов уменьшаются (это означает заметный рост средних сроков, на которые выдаются кредиты и привлекаются депозиты). Такой процесс принято считать положительным фактором, свидетельствующим о росте стабильности и взаимного доверия в экономике.

### 3. Количественные результаты эмпирического исследования деятельности банковской системы

Для моделирования динамики мы объединили счета в еще более крупные группы. Подчеркнем, что выбор переменных модели – отбор счетов в группы – это результат, а не предпосылка исследования, поэтому модельная группировка счетов неизбежно будет отличаться от группировки, принятой в экономическом анализе.

1. **Ликвидность** ( $W$ ) объединяет остатки активных инструментов, которые банк использует для расчетов (своих и клиентских): наличные средства, корреспондентские счета в ЦБ и за границей. Официальная классификация относит к ликвидным активам еще обязательные резервы, межбанковские кредиты (МБК) и корреспондентские счета в других коммерческих банках, но функции обязательных резервов нам нужно выделить особо, а МБК и корреспондентские счета в других банках в целом по банковской системе взаимно уничтожаются. Ценные бумаги также не будем включать в агрегат «ликвидность».

2. **Депозиты в ЦБ** ( $L_c$ ) на все сроки: от одного дня до трех и более лет. Де-факто банки не вкладывают деньги в ЦБ более чем на полгода.

3. **Обязательные резервы** (ФОР) ( $R_c$ ) по обязательствам как в валюте РФ, так и в иностранной валюте.

4. **Расчетные счета** ( $N$ ) включают расчетные счета фирм, депозиты населения до востребования, расчетные счета государства, а также депозиты государства.

5. **Ссуды** ( $L$ ) включают кредиты домохозяйствам, фирмам и нерезидентам. Ограничиваясь рассмотрением такого агрегата, мы избегаем необходимости моделировать процесс ускоренного роста потребительских кредитов по отношению к производственным кредитам и кредитам нерезидентам, который существенно связан не только с поведением банков, но и с поведением домохозяйств. Термин «кредиты» в дальнейшем относим к потоку прироста ссуд.

6. **Депозиты** ( $S$ ) домохозяйств, фирм и нерезидентов. Ограничиваясь рассмотрением такого агрегата, мы избегаем необходимости моделировать процесс ускоренного роста средств, привлеченных из-за границы, по отношению к средствам, привлеченным внутри страны, – процесса, который существенно связан не только с поведением российских банков, но и с поведением их заграничных контрагентов.

7. **Модельный собственный капитал** ( $\Omega$ ) банка в модели для соблюдения баланса включает все счета, не попавшие в остальные агрегаты: собственные средства; выпущенные акции, облигации и векселя; расчетные счета нерезидентов; займы у ЦБ; вложения в ценные бумаги и кредиты государству. Впрочем, этому есть основания: операции с ценными бумагами не относятся к собственно банковской деятельности, поэтому поместим их с нужными знаками в модельный собственный капитал. Остальные остатки, входящие в модельный капитал, относительно малы, но перенос их в другие группы ухудшит точность эмпирических соотношений, обсуждающихся в следующих разделах.

Поскольку модельное описание капитала существенно отличается от принятого в учете, мы не будем сопоставлять эту величину с отчетной величиной собственного капитала.

Используя эти крупные группы счетов, удалось создать *описание динамики ликвидных средств* и выявить *источник формирования новых денег в экономике*.

Единственным источником формирования новых денег в рамках мировой финансовой системы служит кредитная эмиссия (одновременное увеличение активов и пассивов). Например, вы можете взять в российском банке валютный кредит. Банк запишет эту сумму как ваш долг (актив банка) и одновременно положит ее на ваш расчетный счет (пассив банка). Если остальные банки признают ваш банк платежеспособным, то со своего расчетного счета вы оплатите товар или услугу, и эти новые доллары на законных основаниях начнут циркулировать по миру. Центральный банк (или, например, Федеральная резервная система США) узнает о них лишь постольку, поскольку их захотят обналичить, и тогда он вынужден будет выпустить бумажные рубли (доллары).

Российская финансовая система, будучи частью глобальной, может проводить свою кредитную эмиссию, а может расширять ресурсы за счет внешних кредитов. Выясним, какой процесс доминирует – внешнее заимствование или внутренняя кредитная эмиссия. Одновременно выделим круг операций, реализующих основную функцию банковской системы – трансформацию сбережений в инвестиции.

Ответ на поставленный вопрос дает источник формирования обязательных резервов: банки обязаны вкладывать определенную часть привлеченных средств в ЦБ на беспроцентный счет ФОР. Если доминирует механизм привлечения средств в форме внешних кредитов, то часть из них вкладывается в ФОР, а остальная часть выдается клиентам в виде кредитов. Для такой открытой системы следует ожидать соотношения

$$L(t) + Lc(t) + Rc(t) \approx S(t) + N(t). \quad (1)$$

Если доминирует механизм кредитной эмиссии, то банки должны заранее накапливать средства для вложений в ФОР, т.е. ФОР должен формироваться за счет собственных средств. Для такой закрытой системы следует ожидать соотношения

$$L(t) + Lc(t) \approx S(t) + N(t). \quad (2)$$

Отношение левой к правой части (1), (2) показано на рис. 3.

Рисунок ясно показывает, что в соотношении (2) не хватает обязательных резервов. Соотношение же (1) оказывается отличной коинтеграцией нестационарных рядов. При этом для всей банковской системы это соотноше-



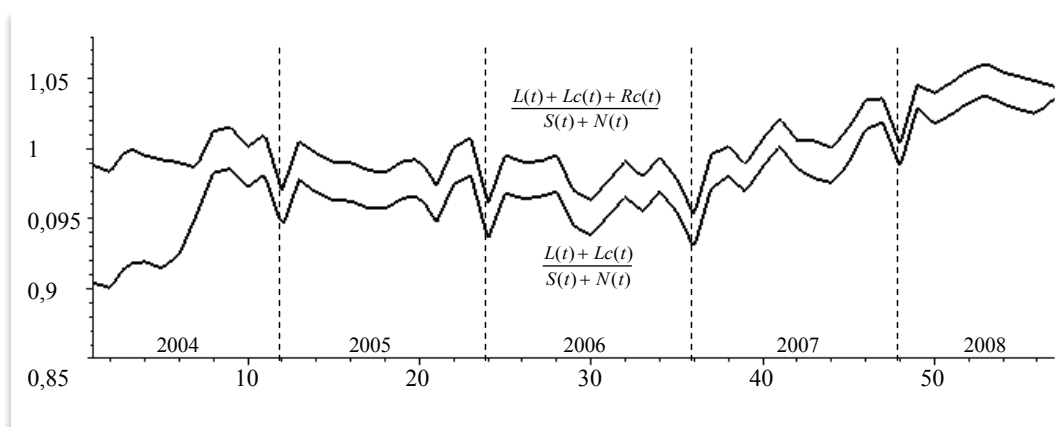
ние выполняется на порядок точнее, чем для любого отдельного банка, даже самого крупного (Андреев, Пильник, Поспелов, 2009).

Таким образом, можно сделать вывод, что *современная банковская система России работает преимущественно по «открытой схеме»*. Выданные в кредит деньги уходят, например, на оплату импорта или вложения в иностранные активы, или просто обналичиваются, и из этих источников возвращаются в систему в виде вкладов и остатков расчетных счетов. Подъем кривых в 2008 г. над единицей это признак «бегства капитала», в том числе в связи с мировым финансовым кризисом.

Ликвидность дохода банку не приносит, но служит для поддержания способности банка отвечать по всем своим обязательствам в обусловленный срок. Стандартным способом описания потребности в ликвидности служат соображения, подобные количественной теории денег: ликвидные остатки должны быть пропорциональны обороту тех активов, движение которых они обеспечивают.

Для российской банковской системы отношение доходных активов к ликвидности систематически и заметно растет, что, кстати, сразу исключает возможность применения мультипликаторных моделей. Однако следует обратить внимание на то, что потребность в ликвидности связана с оборотами по доходным счетам, а наблюдаемой величиной являются остатки доходных счетов. Соотношение же оборотов и остатков изменяется вследствие изменения дюрации (см. рис. 3).

После перебора множества вариантов описания потребности в ликвидности (Андреев, Пильник, Поспелов, 2009) было обнаружено следующее авторегрессионное соотношение для ликвидности



**Рис. 3.**

Точность выполнения равенств (1), (2)

$$W(t) = \tau_w (W(t) - W(t-1)) + \tau_s \beta_S(t) S(t), \quad (3)$$

где коэффициенты  $\tau_w=0,92$ ;  $\tau_s=5,29$  определены стандартными эконометрическими методами. Соотношение (3) может быть интерпретировано как адаптация объема ликвидности к ожидаемой в близком будущем потребности в деньгах (Андреев, Пильник, Поспелов, 2009).

#### 4. Модель рационального поведения банковской системы

Попробуем описать поведение всей банковской системы как рациональное поведение некоторого банка, придерживающегося правил (1), (3). Напомним, что правила (1), (3) относятся только ко всей системе в целом, и ни к одному банку в отдельности.

Основываясь на опыте экономических исследований, предполагаем, что совокупность множества относительно независимых субъектов, выполняющих сходные функции в экономике и связанных отношениями конкуренции, специализации и подражания, ведет себя в целом более регулярно, чем каждый из составляющих ее субъектов, и что именно к такому макроагенту лучше всего применять вариационный принцип, привычные рассуждения о максимизации выгоды или полезности. Впрочем, в конечном итоге мы сведем это описание к обычной динамической модели, определяющей предложение кредитов в зависимости от текущего состояния, а также от складывающихся на рынке процентов и других внешних факторов.

Будем строить модель, основываясь на принципе рациональных ожиданий. В моделях равновесия рациональных ожиданий действует, как правило, несколько лиц, принимающих решения, – агентов. Агенты выбирают планы, оптимальные по их собственным критериям, имея экзогенный прогноз изменения информационных переменных (цен, процентов и др.). Значения информационных переменных определяются в результате взаимодействия агентов (согласования планов). В основе теоретико-игрового определения рациональных ожиданий лежит предположение об отсутствии у агентов ошибочной информации, т.е. о том, что если агенты чего-то не знают об окружающем мире, то они знают, что этого не знают. В рассматриваемом здесь детерминированном случае это означает, что все агенты имеют точный, реализующийся в равновесии прогноз информационных переменных на будущее, так называемое полное предвидение. Правдоподобность предположения о такой сверхинформированности агентов – основной пункт критики принципа рациональных ожиданий. В данной модели мы получим на эту критику неожиданный ответ.

Рассмотрим банк, который к моменту  $t$  привлек депозиты  $S(t)$  и выдал ссуды  $L(t)$ . Средние сроки, на которые привлекаются депозиты и выдаются

кредиты (дюрации), обозначим через  $1/\beta_s(t)$  и  $1/\beta_l(t)$ , соответственно. Приведенные выше результаты эмпирических исследований показывают необходимость учитывать зависимость этих величин от времени. Процесс изменения ссуд и депозитов (остатков) описывается уравнениями:

$$\frac{d}{dt}L(t) = K(t) - \beta_l L(t), \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}S(t) = V(t) - \beta_s S(t), \quad (5)$$

где

$$K(t) \geq 0, \quad (6)$$

$$V(t) \geq 0 \quad - \quad (7)$$

потоки новых ссуд и новых вкладов.

Считаем, что по выданным ссудам банк получает процентные платежи  $r_l(t)L(t)$ , где  $r_l(t)$  – эффективная ставка процента по ссудам, а за привлеченные средства банк платит проценты  $r_s(t)S(t)$ , где  $r_s(t)$  – эффективная ставка процента по депозитам.

Кроме депозитов  $S(t)$  банк привлекает еще средства в виде беспроцентных остатков расчетных счетов  $N(t)$ . Для величины этих остатков нет регулирующей величины типа процента, и банк должен ориентироваться на предложение со стороны клиентов. Конечно, банк может отказаться вести расчетные счета:

$$N(t) \leq N_n(t), \quad (8)$$

где  $N_n(t)$  – известное банку предложение остатков расчетных счетов.

Привлеченные средства  $S(t) + N(t)$  банк должен резервировать в ЦБ<sup>5</sup>. Обозначая через  $\zeta_l(t)$  норму резервирования, получаем, что

$$Rc(t) = \zeta_l(t) (S(t) + N(t)). \quad (9)$$

Сверх обязательных бесплатных резервов  $Rc(t)$  банк вкладывает в ЦБ еще и средства  $Lc(t)$  под процент  $r_c(t)$ :

$$Lc(t) \geq 0. \quad (10)$$

Депозиты в ЦБ де-факто краткосрочные, поэтому их дюрацию не учитываем.

Рассматривая установленное выше соотношение (1) как некоторый сложившийся институт, вводим в модель следующее ограничение на предложение ссуд банком:

$$L(t) + Lc(t) + Rc(t) \leq S(t) + N(t). \quad (11)$$

Ликвидные активы банка  $W(t)$  увеличиваются при получении процентов  $r_l(t)L(t)$ ,  $r_c(t)Lc(t)$ , вкладов  $V(t)$ , приращении остатков  $N(t)$  и возврате ссуд  $\beta_l(t)L(t)$ , а уменьшаются при выдаче кредитов  $K(t)$ , выплате процентов  $r_s(t)S(t)$ , возврате депозитов  $\beta_s(t)S(t)$ , вложении средств в ЦБ  $dLc(t)/dt$ , а также за счет

<sup>5</sup> На самом деле помимо депозитов  $S(t)$  и расчетных счетов  $N(t)$  резервированию подлежат также корреспондентские счета, кредиты ЦБ. Поэтому фигурирующая в (9) база обязательных резервов не полна. Это неизбежный дефект такого рода модели. Тем не менее следует заметить, что используется не номинальная ставка резервирования, а фактическая, поэтому сам объем ФОР, рассчитанный с учетом (9), соответствует действительности.

средств  $Z(t)$ , выводимых из круга собственно банковской деятельности:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(t) = & r_l(t)L(t) + \beta_l(t)L(t) - K(t) + V(t) - r_s(t)S(t) - \beta_s(t)S(t) + \\ & + \frac{d}{dt}N(t) - \frac{d}{dt}Lc(t) + r_c(t)Lc(t) - Z(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Поток  $Z(t)$  будем трактовать как извлекаемый из банковской деятельности доход, который банк стремится максимизировать. Поток  $Z(t)$  используется для выплаты дивидендов собственникам, налоговых платежей, инвестиций в основные фонды (включая участие в собственности), а также операционные расходы. Эти потоки (кроме, может быть, налогов) не связаны напрямую с активами и пассивами банка, и мы попытаемся построить модель, не вдаваясь в подробное описание структуры потока  $Z(t)$ .

Дифференциальный аналог установленного эконометрического соотношения (3) считаем описанием потребности банка в ликвидности

$$\frac{d}{dt}W(t) \leq \frac{W(t) - \tau_s \beta_s(t)S(t)}{\tau_w}. \quad (13)$$

Соотношения (4)–(13) представляют собой ограничения, наложенные в рамках модели на возможности банка выбирать значения своих планируемых переменных (управлений):

$$S(t), L(t), W(t), K(t), V(t), Z(t), N(t), Lc(t). \quad (14)$$

Согласно принципу рациональных ожиданий при планировании управляющих переменных банк может рассчитывать на точный прогноз информационных переменных:

$$\zeta_i(t), r_l(t), r_s(t), r_c(t), \beta_s(t), \beta_l(t), N_n(t). \quad (15)$$

Выбор банком планируемых переменных (14) фактически задает предложение им кредитов, а также его спрос на привлеченные и ликвидные средства как функцию от текущих и будущих значений информационных переменных (в первую очередь процентов). Впрочем, как будет показано ниже, рассматриваемая оптимизационная задача обладает сильным магистральным свойством, в силу чего зависимость спроса и предложения от прогнозов на будущее фактически пропадает.

При определении критерия выбора планируемых переменных используем результаты недавно развитой теории равновесия с управлением капиталом (Андреев и др., 2007). Согласно этому подходу универсальным описанием интересов экономического агента можно считать стремление к максимизации собственной капитализации, которое, в свою очередь, может быть сведено к задаче максимизации потока полезных расходов (в данном случае  $Z(t)$ ) в заданной временной пропорции  $db(t)$ :

$$Z(t) = \theta db(t), \quad \theta \rightarrow \max \quad (16)$$

по переменным (14) при ограничениях (4)–(13) на некотором интервале  $[t_0, T]$ , заданных в начальный момент значениях фазовых переменных  $S(t_0)$ ,  $L(t_0)$ ,  $W(t_0)$  и заданных траекториях экзогенных величин (15).

Для разрешимости задачи (16) ограничения (4)–(13) надо дополнить терминальными условиями, которые, как показано в (Пильник, Поспелов, 2007), естественно задавать как условия роста некоторой линейной формы фазовых переменных

$$\begin{aligned} & (a_0^L L(t_0) + a_0^S S(t_0) + a_0^{Lc} Lc(t_0) + a_0^N N(t_0) + W(t_0))e^{\gamma(T-t_0)} \leq \\ & \leq a_T^L L(T) + a_T^S S(T) + a_T^{Lc} Lc(T) + a_T^N N(T) + W(T), \end{aligned} \quad (17)$$

коэффициенты которой уточняются в процессе решения задачи.

Мы не будем подробно останавливаться на этих деталях, поскольку, как будет показано позже, *выбор границ интервала планирования и вид терминальных условий в данной модели практически не влияют на вид решения* на большей части траектории за исключением небольшого конечного участка.

## 5. Метод решения задачи банка

Задача (16) при ограничениях (4)–(13), (17) относится к классу задач оптимального управления. Это линейная неавтономная задача со смешанными ограничениями. Аналитически до конца она, конечно, не может быть решена. Численное решение неавтономной задачи вне полной модели равновесия не очень информативно и очень трудоемко. Однако класс задач, подобных задаче (4)–(13), (17), как с формальной, так и с содержательной точки зрения, был изучен в (Андреев и др., 2007). Была разработана и частично автоматизирована в системе ЭКОМОД (набор функций и процедур, реализованных в среде компьютерной алгебры Maple) методика исследования таких задач.

1. Первым шагом исследования является составление достаточных условий оптимальности как условий седловой точки функционала Лагранжа. Система ЭКОМОД после записи в ней выражений (16), (4)–(13), (17) автоматически записывает функционал Лагранжа и условия его седловой точки. Поскольку задача линейна, эти условия будут достаточны для оптимальности. Они имеют вид:

$$[\Phi_1] \begin{bmatrix} a_T^L L(T) + a_T^S S(T) + a_T^{Lc} Lc(T) + a_T^N N(T) + W(T) - \\ - (a_0^L L(t_0) + a_0^S S(t_0) + a_0^{Lc} Lc(t_0) + a_0^N N(t_0) + W(t_0))e^{\gamma(T-t_0)} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$[\Phi_{10}(t)] \left[ W(t) - \tau_s \beta_s(t) S(t) - \tau_w \frac{d}{dt} W(t) \right], \quad (19)$$

$$[\Phi_7(t)] [Lc(t)], \quad (20)$$

$$[\Phi_6(t)] [N_n(t) - N(t)], \quad (21)$$

$$[\phi_5(t)][V(t)], \quad (22)$$

$$[\phi_3(t)][S(t) + N(t) - L(t) - Lc(t) - \zeta_l(t)(S(t) + N(t))], \quad (23)$$

$$[\phi_2(t)][K(t)], \quad (24)$$

$$0 = K(t) - \beta_l L(t) - \frac{d}{dt} L(t),$$

$$0 = V(t) - \beta_s(t)S(t) - \frac{d}{dt} S(t),$$

$$0 = r_l(t)L(t) + \beta_l(t)L(t) - K(t) + V(t) - r_s(t)S(t) - \beta_s(t)S(t) + \frac{d}{dt} N(t) -$$

$$- \frac{d}{dt} Lc(t) + r_c(t)Lc(t) - \theta d_b(t) - \frac{d}{dt} W(t),$$

$$0 = \left( \frac{d}{dt} \psi_8(t) + \phi_{10}(t) + \tau_w \frac{d}{dt} \phi_{10}(t) \right) dW,$$

$$0 = (\phi_5(t) + \psi_4(t) + \psi_8(t)) dV,$$

$$0 = \left( \phi_3(t) - \frac{d}{dt} \psi_8(t) - \phi_6(t) - \zeta_l(t) \phi_3(t) \right) dN,$$

$$0 = \left( (\psi_9(t) - \psi_4(t) - \psi_8(t) - \tau_s \phi_{10}(t)) \beta_s(t) + \right.$$

$$\left. + (1 - \zeta_l(t)) \phi_3(t) + \frac{d}{dt} \psi_4(t) - \psi_8(t) r_s(t) \right) dS,$$

$$0 = \left( \frac{d}{dt} \psi_8(t) + \phi_7(t) - \phi_3(t) + \psi_8(t) r_c(t) \right) dLc,$$

$$0 = (\phi_2(t) - \psi_8(t) + \psi_1(t)) dK,$$

$$0 = \left( (-\psi_1(t) + \psi_8(t)) \beta_l(t) + \frac{d}{dt} \psi_1(t) - \phi_3(t) + \psi_8(t) r_l(t) \right) dL,$$

$$0 = (\Phi_1 - \psi_8(T) - \tau_w \phi_{10}(T)) dW(T),$$

$$0 = (a_T^L \Phi_1 - \psi_1(T)) dL(T),$$

$$0 = (a_T^{Lc} \Phi_1 - \psi_8(T)) dLc(T),$$

$$0 = (a_T^S \Phi_1 - \psi_4(T)) dS(T),$$

$$0 = (a_T^N \Phi_1 + \psi_8(T)) dN(T),$$

где  $\Phi_1, \psi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \psi_4(t), \phi_5(t), \phi_6(t), \phi_7(t), \psi_8(t), \phi_{10}(t)$  – множители Лагранжа к ограничениям (4)–(8), (10)–(12), (13), (17). Условные множители  $dW, dV$  и т.д. показывают, вариацией какой из переменных получено то или иное равенство. Запись  $[a][b]$  использована для обозначения *условий дополняющей нежесткости (УДН)* (18)–(24) (условия минимальности функционала по неотрицательным двойственным переменным к неравенствам) и равносильна системе условий:

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad ab = 0. \quad (25)$$

## 2. Удобно ввести обозначения

$$\rho(t) = -\frac{d}{dt} \psi_6(t) / \psi_6(t), \quad (26)$$

$$k(t) = -\psi_1(t) - \tau_w \rho(t) + 1. \quad (27)$$

Содержательно величина  $\rho(t)$  имеет смысл внутренней доходности модельного капитала агента (Пильник, Поспелов, 2007),  $k(t)$  – эффективного процента по вновь выданным ссудам (6).

3. Каждое условие дополняющей нежесткости (25) сходно с уравнением  $b=f(a)$  в том отношении, что ограничивает возможное положение величин  $a$  и  $b$  некоторой кривой. Однако эта кривая – граница первого квадранта – вырождена. Задание значения одной из величин ( $a$  или  $b$ ) не определяет, строго говоря, вторую.

С математической точки зрения условия дополняющей нежесткости различают альтернативные режимы на оптимальной траектории. Некоторые из этих режимов заведомо нереализуемы в рамках объемлющего описания всей экономической системы. Например, размер остатков расчетных счетов  $N(t)$ , которые банки согласны держать, должен совпадать со спросом  $N_n(t)$  (см. (8)), иначе клиенты не смогут провести свои расчеты. Поэтому разрешим УДН (21), положив  $N(t) = N_n(t)$ . В дальнейшем эта величина считается заданной из статистики. При разрешении УДН дополнительно получаем еще неравенство  $\phi_6(t) \geq 0$ , которое должно выполняться на решениях.

Искомые величины предложения отвлеченных средств  $L(t)$  и спроса на привлеченные средства  $S(t)$  определяются, только если известна величина  $d_b(t)$  (см. (16)). По логике модели величина  $d_b(t)$  должна быть задана собственниками банка, исходя из информации о доходности его модельного капитала и о доходности альтернативных вложений, а также понимания собственниками своих интересов. Это требует выхода за рамки модели банка. Не имея возможности без  $d_b(t)$  определить спрос  $S(t)$  и предложение  $L(t)$  по отдельности, можно вычислить предложение (и другие планируемые переменные) в зависимости от спроса.

Исключим  $d_b(t)$  из системы и в дальнейшем будем считать заданной по статистике величину депозитов  $S(t)$ , а предложение ссуд  $L(t)$  вычислять из модели. Статистика  $S(t)$  и  $\beta_s(t)$  такова, что определяемая из (0,5) величина вновь привлеченных вкладов  $V(t)$  положительная. Поэтому далее будем считать, что  $V(t) > 0$ , а в системе условий оптимальности заменим УДН (22) на  $\phi_5(t) = 0$ .

Четыре УДН – (19), (20), (23), (24) – смягчим, иначе говоря, заменим выражения вида (25) выражениями вида

$$b=f(a), \quad (28)$$

где  $f$  – монотонно убывающая функция с подходящей нормировкой по величине, подлежащая идентификации по эмпирическим данным.

Объяснение этой операции следующее. Поставленная задача линейна, поэтому в типичном случае ее оптимальные решения будут «прыгать по углам». Если же управления еще и не ограничены, как например  $K(t)$ , то задача будет разрешима и притом неоднозначно только при определенном соотношении экзогенных переменных. В модели целостной экономической системы это может быть и не так уж страшно. Часто из условий разрешимости задач отдельных агентов удастся определить нетривиальное движение всей системы, напоминающее особые режимы в теории оптимального управления. Но при рассмотрении одного агента положение выглядит безнадежным. Кажется, что нужно усложнять исходную задачу, вводя в нее какие-то нелинейности. Мы, однако, полагаем, что это не поздно сделать и после вывода условий оптимальности для относительно простой задачи.

С экономической точки зрения УДН описывают бесконечно эластичные функции спроса/предложения агента. Будем считать, что УДН (25) решает главный в экономической теории вопрос о том, какая комбинация информационных переменных служит аргументом функции спроса/предложения, а форму этой функции в виде (28) будем подбирать эмпирически.

УДН (20), (23) были смягчены линейными функциями, а (19), (24) – квадратичными (с подбором соответствующего монотонно убывающего участка):

$$Lc(t)/(S(t) + N(t)) = -a_1 \phi_7(t) + b_1 ,$$

$$1 - (L(t) + Lc(t) + \zeta(t)(S(t) + N(t)))/(S(t) + N(t)) = -a_2 \phi_3(t) + b_2 ,$$

$$K(t) = (a_l k^2(t) + b_l k(t) + c_l)(S(t) + N(t)) ,$$

$$W(t) - \tau_s \beta_s(t)S(t) - \tau_w \frac{d}{dt}W(t) = (a_w \rho^2(t) + b_w \rho(t) + c_w)(S(t) + N(t)) .$$

В конце концов, после перечисленных операций (замены переменных, выбора режимов и смягчения УДН) система условий оптимальности была частично разрешена. В итоге осталось четыре дифференциальных уравнения:

$$\frac{d}{dt}L(t) = ((S(t) + N(t)))(S(t) + N(t)) - \beta_l L(t) , \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt}W(t) = -\frac{(a_w \rho^2(t) + b_w \rho(t) + c_w)(S(t) + N(t))}{\tau_w} + \frac{W(t) - \tau_s \beta_s(t)S(t)}{\tau_w} , \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) = & \rho^2(t) + \\ & + \frac{-(a_1 \zeta(t) + a_2) + (a_1 + a_2)(\tau_s \beta_s(t) - \tau_w r_s(t)) + a_1 \tau_w (1 - \zeta(t)) r_c(t)}{\tau_w (a_1 \zeta(t) + a_2)} \rho(t) + \end{aligned}$$



$$+ \frac{(a_1 + a_2)r_s(t) - (b_1 + b_2)(1 - \zeta(t)) - a_1\tau_w(1 - \zeta(t))r_c(t) - 2\zeta(t)}{\tau_w(a_1\zeta(t) + a_2)} + \quad (31)$$

$$+ \frac{(1 - \zeta(t))L(t)}{\tau_w(a_1\zeta(t) + a_2)(S(t) + N(t))},$$

$$\frac{d}{dt}k(t) = \beta_l(t)k(t) +$$

$$+ \left( - \frac{a_1\tau_w\zeta(t)r_c(t) - a_2(\tau_s\beta_s(t) - \tau_w r_s(t))}{a_1\zeta(t) + a_2} - \tau_w r_l(t) + k(t) \right) \rho(t) + \quad (32)$$

$$+ r_l(t) - \frac{(b_1 + b_2 + 1 - \zeta(t))\zeta(t) + a_2r_s(t) + a_1\zeta(t)r_c(t)}{(a_1\zeta(t) + a_2)} -$$

$$- \frac{\zeta(t)L(t)}{(a_1\zeta(t) + a_2)(S(t) + N(t))}$$

на неизвестные  $L(t)$ ,  $W(t)$ ,  $\rho(t)$ ,  $k(t)$ .

### 6. Магистральный эффект

Для получившейся системы из четырех дифференциальных уравнений (29)–(32) имеются два начальных условия – на прямые переменные  $L(t)$ ,  $W(t)$ , а на две комбинации двойственных переменных  $\rho(t)$ ,  $k(t)$  – только одно терминальное условие (17). Аналогичная «недостача» терминальных условий возникала и в модели российской экономики (Андреев и др., 2007), где впервые была применена постановка задачи с терминальным условием роста модельного капитала (17). Оказалось, что зависимость решений от недостающих терминальных условий не существенна. В этом состоит *магистральный эффект*, который еще более ярко проявляется в рассматриваемой модели.

Следует иметь в виду, что переменные  $\rho(t)$ ,  $k(t)$  имеют смысл доходности модельного капитала и некоего эффективного процента по вновь выданным ссудам, а потому эти величины должны оставаться положительными и равномерно ограниченными на разумных решениях уравнений модели.

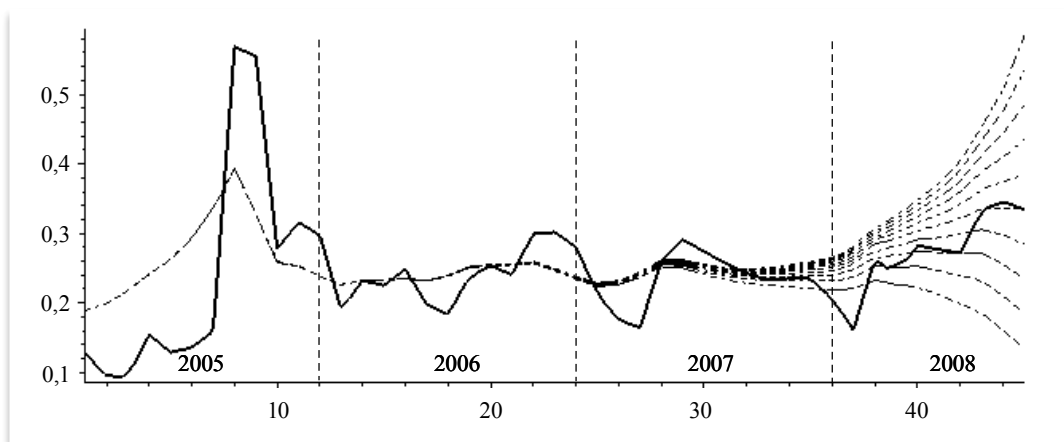
Между тем уравнение, например (31), – это неустойчивое в прямом времени уравнение относительно  $\rho(t)$ , у которого существует единственное ограниченное решение, и это решение глобально устойчиво при движении в обратном времени от положительного терминального условия. При достаточно малых постоянных времени в этом уравнении именно это решение будем видеть на большей части траектории независимо от выбора терминального значения  $\rho(T)$ . В этом и состоит магистральный эффект, который, видимо, должен проявляться в любой реалистичной оптимизационной модели экономики. Без него модельные оценки сильно зависели бы от наших сомнительных представлений о далеком будущем. Заметим, что наличие магистраль-

ного эффекта определяется топологическими свойствами оптимизационных задач экономического происхождения, которые отличны от топологических свойств оптимизационных задач, возникающих в механике.

Если задать величины  $L(t)$ ,  $S(t)$ ,  $N(t)$ ,  $\zeta(t)$ ,  $\beta_s(t)$ ,  $r_s(t)$ ,  $r_c(t)$  в соответствии со статистическими данными и заменить производные запаздывающими разностями  $df(t)/dt = f(t) - f(t-1)$ , то при более или менее произвольно выбранных параметрах  $\tau_w$ ,  $\tau_s$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  разностный аналог уравнения (31) при различных терминальных значениях  $\rho(T)$  будет иметь решения, изображенные пунктирными линиями на рис. 4. На большей части траектории мы фактически имеем одно решение, не зависящее от терминального условия. Это решение следует (в обратном времени) за величиной большего (неустойчивого в прямом времени) корня  $\rho_0(t)$  правой части уравнения (31) (сплошная линия):

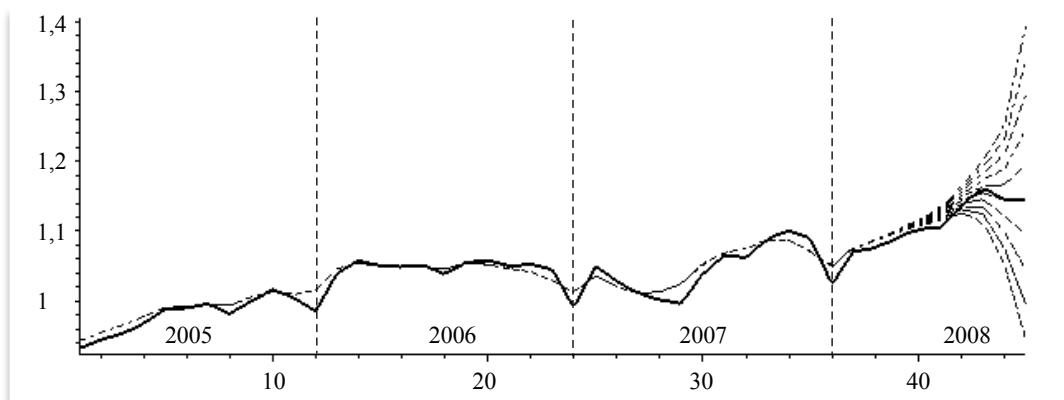
$$\begin{aligned} 0 = & \rho_0^2(t) + \\ & + \frac{-(a_1\zeta(t) + a_2) + (a_1 + a_2)(\tau_s\beta_s(t) - \tau_w r_s(t)) + a_1\tau_w(1 - \zeta(t))r_c(t)}{\tau_w(a_1\zeta(t) + a_2)}\rho_0(t) + \\ & + \frac{(a_1 + a_2)r_s(t) - (b_1 + b_2)(1 - \zeta(t)) - a_1\tau_w(1 - \zeta(t))r_c(t) - 2\zeta(t)}{\tau_w(a_1\zeta(t) + a_2)} + \\ & + \frac{(1 - \zeta(t))L(t)}{\tau_w(a_1\zeta(t) + a_2)(S(t) + N(t))}. \end{aligned}$$

Однако для идентифицированных («настоящих») значений параметров  $\tau_w$ ,  $\tau_s$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  точное решение (31) фактически совпадает (рис. 5) с квазистационарным решением  $\rho_0(t)$  (динамика  $\rho_0(t)$ , разумеется, зависит от значений параметров). Аналогичный сильный магистральный эффект имеет место и для уравнения (32).



**Рис. 4.**

Решения уравнения (31) при произвольных значениях параметров



**Рис. 5.**  
Решения уравнения (31) при идентифицированных значениях параметров

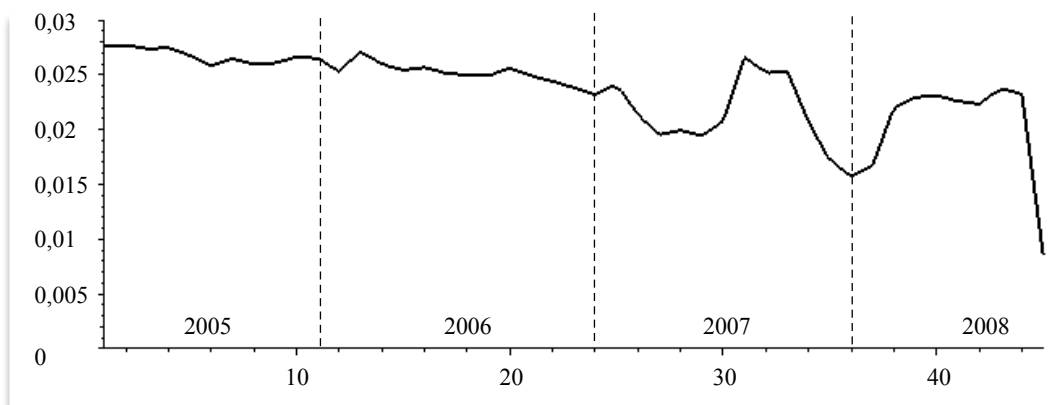
Обнаруженный сильный магистральный эффект имеет большое содержательное значение. Хотя задача о рациональном поведении банка ставилась в предположении знания будущих значений информационных переменных (15), на оптимальной траектории оставшиеся двойственные переменные  $\rho(t)$ ,  $k(t)$  определяются текущими значениями информационных переменных, и *рациональное поведение банка фактически описывается динамической системой*, а не краевой задачей, как предполагалось в исходной постановке в соответствии с принципом рациональных ожиданий.

Свойство это нередко возникало в математических моделях экономики (см., например (Greene, 2003)), с ним мы сталкивались и в более ранних наших работах (Петров, Поспелов, Шананин, 1996). Возникает ощущение существования некоего «экономического антропного принципа»: экономический механизм вступает в действие только тогда, когда его рациональное использование не требует слишком детального предвидения. Поэтому, если в модели описывать не абстрактную, а реально наблюдаемую систему экономических механизмов, то в ней после идентификации проявится сильный магистральный эффект.

Сильный магистральный эффект значительно упрощает модель: дифференциальные уравнения (31), (32) заменяем конечными (равенство нулю правых частей (31), (32)).

## 7. Идентификация и результаты моделирования

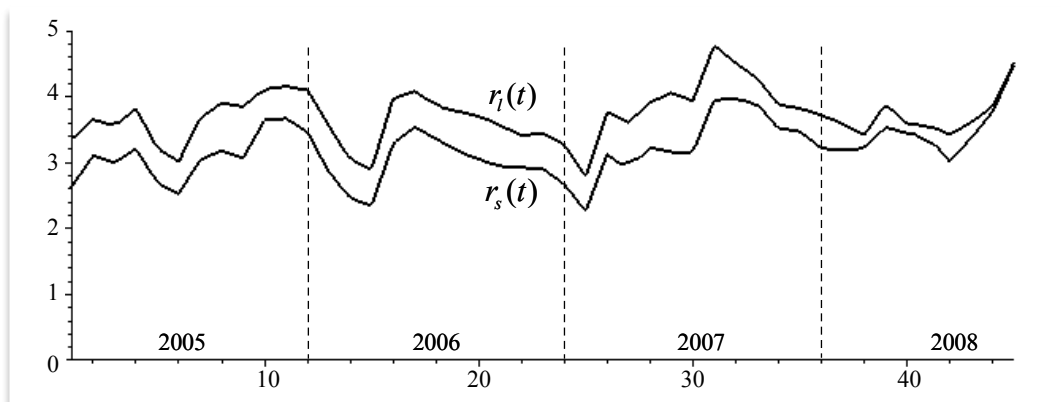
Теперь задача свелась к идентификации параметров  $\tau_w$ ,  $\tau_s$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $a_p$ ,  $b_p$ ,  $c_p$ ,  $a_w$ ,  $b_w$ ,  $c_w$  так, чтобы они воспроизводили динамику отвлеченных средств  $L(t)$ , ликвидности  $W(t)$  и депозитов в ЦБ  $Lc(t)$  при заданной динамике депозитов  $S(t)$  и информационных переменных (15).

**Рис. 6.**

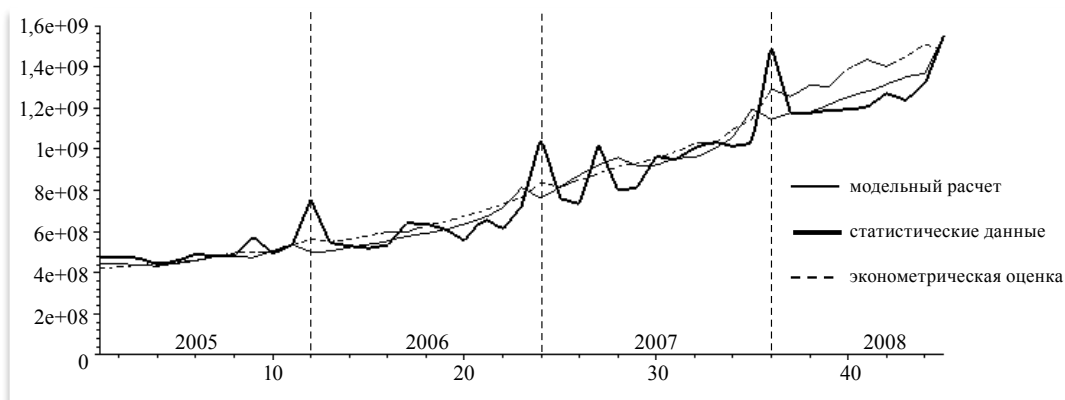
Динамика средней фактической величины нормы резервирования

Прежде всего решим, как определять экзогенные переменные модели. Депозиты  $S(t)$  и расчетные счета  $N_n(t)$  брались непосредственно из агрегированных банковских балансов (см. разд. 3). Обратные дюрации  $\beta_l(t)$ ,  $\beta_s(t)$  уже были описаны выше (рис. 2). Норма резервирования  $\zeta(t)$  устанавливается и публикуется Центральным банком, но она дифференцирована по видам пассивов. Поэтому при идентификации мы взяли среднюю величину, вычисленную по фактической величине обязательных резервов (рис. 6):  $\zeta(t) \cong Rc(t)/(S(t)+N(t))$ .

Самой сложной оказалась оценка величин фактических процентных ставок  $r_l(t)$ ,  $r_s(t)$ . Данные о средних процентных ставках публикуются, но они относятся к предложению новых кредитов, а по логике модели нам нужны доходности уже сделанных вложений и привлеченных средств, и

**Рис. 7.**

Динамика эффективных месячных процентных ставок

**Рис. 8.**

Динамика ликвидности, тыс. руб.

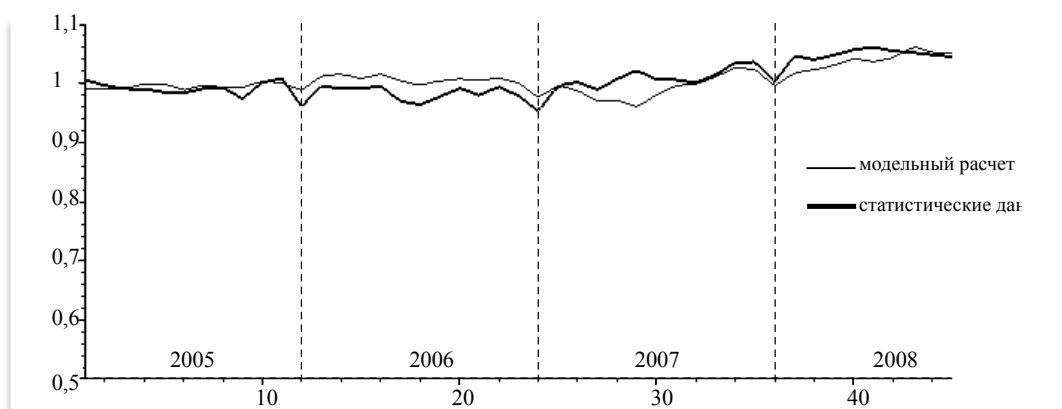
к тому же разные источники приводят разные данные. По этим причинам проценты вычислялись как отношение доходов ( $D$ ) и расходов ( $R$ ) банков, отраженных в статьях счетов прибылей и убытков, к суммам привлеченных и отвлеченных средств (рис. 7):

$$r_l(t) \cong D(t)/L(t), \quad r_s(t) \cong R(t)/L(t).$$

Параметры выбирались так, чтобы минимизировать среднеквадратичное относительное отклонение эндогенных модельных величин от их статистических аналогов. Основные результаты расчетов по идентифицированной модели представлены на рис. 8–11. График динамики ликвидности (рис. 8) показывает, что модель правильно отражает только общий ход процесса изменения ликвидности, но не воспроизводит «пики», возникающие в декабре каждого года в связи с резким ростом всякого рода выплат и трат. Тем не

**Рис. 9.**

Динамика ссуд, тыс. руб.



**Рис. 10.**  
Динамика показателя замкнутости банковской системы

менее дефицит ликвидности в районе 40-го месяца и его преодоление после 44-го месяца модель воспроизводит вполне удовлетворительно: и статистическая, и модельная кривые весь этот период проходят ниже эконометрической кривой, определяемой соотношением (3) (пунктирная линия).

Еще более точно модель воспроизводит динамику кредитных вложений в экономику (рис. 9), хотя на период кризиса (в конце графика) модель дает значения выше наблюдавшихся.

Сформулируем главные результаты модельных расчетов.

Как показывает рис. 10, модель хорошо воспроизводит динамику показателя замкнутости банковской системы  $E(t) = (L(t) + Lc(t) + \zeta(t)(S(t) + N(t)))/(S(t) + N(t))$  (отношение правой и левой частей (1)). Особенно важно, что воспроизводится его рост в конце рассматриваемого



**Рис. 11.**  
Модельные депозиты банков в ЦБ (пунктирная линия), и наблюдавшаяся величина сальдо вложений и заимствований банков в ЦБ (сплошная линия), тыс. руб.

периода времени. Рост показателя рассматривался как следствие оттока капитала из России вследствие кризиса.

Модель отражает нерегулярную динамику депозитов коммерческих банков в ЦБ, отмеченную в разд. 2. На рис. 11 сплошная линия показывает динамику сальдо вложений и заимствований в ЦБ. До 40-го месяца займы банков в ЦБ ничтожны, потом быстро растут, так что в следующие за 44-м месяцы сальдо становится отрицательным.

В модели ограничение (10) «смягчено», поэтому при достаточных стимулах модельный банк может сделать величину  $Lc(t)$  отрицательной, что и происходит около 40-го месяца.

Таким образом, заданный экзогенно приток средств на остатки расчетных счетов создает для модельного агента стимулы вкладывать деньги в ЦБ как раз тогда и такие, чтобы модельный ряд хорошо воспроизвел наблюдавшуюся динамику депозитов в ЦБ. Кризис заставляет банки извлекать эти вклады.

Таким образом, проведенная верификация модели показала, что относительно несложная, но сильно нелинейная динамическая система способна адекватно воспроизвести зависимость предложения ссуд и спроса на наличность от предложения привлеченных средств и процентов.

Аналитических и прогнозных расчетов авторы не проводили, поскольку модель одного агента содержит слишком много экзогенных переменных, которые бессмысленно изменять и прогнозировать независимо друг от друга.

## 8. Заключение

Было найдено сравнительно несложное и правдоподобное описание функционирования современной банковской системы России, пригодное для включения в модели всей экономики. Это описание не может быть заменено простыми соотношениями типа денежных мультипликаторов.

Модель успешно воспроизводит реакцию банковской системы на неожиданные события, такие как, например, масштабная распродажа активов или мировой финансовый кризис.

Выяснилось, что банковская система функционирует как единый агент даже в случае явно искусственного вмешательства в нормальное течение ее деятельности. Выяснилось также, что банковская система исполняет свою основную функцию – трансформацию сбережений в инвестиции, но источники для финансирования расширения операций она предпочитает искать за рубежом, а не создавать путем кредитной эмиссии.

В процессе работы был накоплен определенный опыт сочетания эконометрического и структурного подходов к моделированию поведения эконо-

мического агента. В частности, с помощью эконометрических исследований был выявлен основной круг оборота привлеченных и отвлеченных средств, а также найдена своеобразная модификация соотношений количественной теории денег. Эти эмпирические соотношения использовались в модели рационального поведения как технологические и институциональные ограничения.

При исследовании модели снова проявился сильный магистральный эффект, который в данном случае даже позволил свести краевую задачу к динамической системе. Этот уже много раз наблюдавшийся эффект показывает, что при правильном отборе учитываемых в модели экономических механизмов принцип рациональных ожиданий не обязательно требует фактического предвидения будущих значений информационных переменных.

### Литература

**Автухович Э.В., Гурьев С.М., Оленев Н.Н.** и др. (1999): Математическая модель экономики переходного периода. М.: ВЦ РАН.

**Андреев М.Ю., Пильник Н.П., Поспелов И.Г.** (2009): Моделирование деятельности современной российской банковской системы // *Экономический журнал ВШЭ*. том 13, № 2. С. 143–171.

**Андреев М.Ю., Поспелов И.Г.** (2004): Модель управления ликвидностью банка при случайно колеблющихся ставках процентов // *Математическое моделирование*. № 3. С. 3–22.

**Андреев М.Ю., Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.А.** (2007): Технология моделирования экономики и модель современной экономики России. М.: МИФИ.

**Гурьев С.М., Поспелов И.Г.** (1997): Модель деятельности банка при отсутствии инфляции и экономического роста // *Экономика и математич. методы*. Т. 33. Вып. 3. С. 35–47.

**Гусейн-Заде С.М.** (1987): О встречаемости ключевых слов и о других ранжированных рядах // *НТИ. Серия 2*. № 1. С. 28–32.

**Дмитриев А.С., Шугаль Н.Б.** (2006): Макроэкономическое моделирование взаимосвязей реального и денежного секторов российской экономики. Часть 1 // *Экономический журнал ВШЭ*. Т. 10. № 2. С. 234–266.

**Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.** (1996): Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат.

**Пильник Н.П., Поспелов И.Г.** (2007): О естественных терминальных условиях в моделях межвременного равновесия // *Экономический журнал ВШЭ*. Т. 11. № 1. С. 1–33.

**Diaz-Gimenez J., Prescott E.C., Fitzgerald T., Alvarez F.** (1992): Banking in Computable General Equilibrium Economies // *Journal of Econ. Dynamics and Control, Elsevier*. Vol. 16(3–4). P. 533–559.

**Fair R.C.** (2004): The U.S. macroeconomic model. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://fairmodel.econ.yale.edu/wrkbook/wb.htm#0>, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

**Florenzano M., Kanellopoulou S., Vailakis Y.** (2006): Equilibrium of Incomplete Markets with Money and Intermediate Banking System. Centre d'Economie de la Sorbonne (CES).



[Электронный ресурс] Режим доступа: <http://mse.univ-paris1.fr/Publicat.htm>, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

**Goodhart C., Sunirand P., Tsomocos D.P.** (2004): A Time Series Analysis of Financial Fragility in the UK Banking System // *Annals of Finance*. Vol. 2(1). P. 1–21.

**Greene W. H.** (2003): *Econometric Analysis* (5th edition). N.Y.: Prentice Hall.

**Machicado C.G.** (2006): Liquidity Shocks and the Dollarization of a Banking System. Development Research Working Paper Series № 09/2006.

**Thadden E.-L. von** (2000): An Incentive Problem in the Dynamic Theory of Banking. Research paper series. International Center for Financial Asset Management and Engineering // *Journal of Math. Econ.* Vol. 38(1). P. 271–292.

**Zipf G.K.** (1949): *Human Behaviour and the Principle of Least-Effort*. Cambridge: Addison-Wesley.

*Поступила в редакцию 30.12.2008 г.*

**M.Y. Andreev**

Computing Centre, Moscow,

**N.P. Pil'nik**

State University - Higher School of Economics  
Moscow,

**I.G Pospelov**

Computing Centre, Moscow

### **Rational Expectation Model of Modern Russian Banking System and the Strong Turnpike Property**

An econometric analysis of modern Russian banking system is carried out. A set of discovered relations was used as constraints in a mathematical model of banking system under the assumption of rational expectation (perfect foresight) of agents. A strong turnpike property is found: agents' optimal equilibrium plans are independent of the future information variables. The turnpike property allows reduction of bank's boundary problem to dynamic problem.

*Keywords: banking system of Russia, general equilibrium model, rational expectation.*

*JEL classification: C68, D58, G21.*